Klasat VII-VIII - Pjesa e parë

1. Një numër quhet super i thjeshtë nëse prodhimi i shifrave të tij është numër i thjeshtë. Sa numra super të thjeshtë dy-shifror ekzistojnë?

2. Sa numra tre-shifror janë të tillë që kur mblidhen me shumën e shifrave të tyre formohet numër i plotëpjesëtueshëm me 101?

3. Njësoni

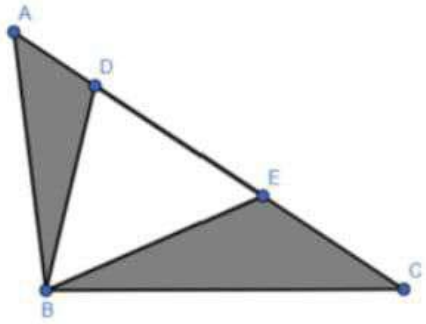
$$\frac{1}{101 \cdot 103} + \frac{1}{101 \cdot 103 \cdot 105} + \cdots + \frac{1}{2019 \cdot 2021}.$$

4. Në sa mënyra mund të ndahen 10 biskota në 9 qese identike të tilla që secila qese të ketë numër çift të biskotave (qeset mund të jenë të zbrazëta)?

5. Me sa zero përfundon numri

$$17! = 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdots 2 \cdot 1\,?$$

6. Jepet trekëndëshi ABC dhe pikat D, E si në figurë të tilla që $EC = 2AD$ dhe raporti i shumës së syprinave të trekëndëshave ABD dhe EBC me syprinën e trekëndëshit ABC është $\frac{1}{2}$. Nëse $AC = 17$, atëherë gjeni gjatësinë e AD.



7. Sa shumëkëndësha kanë vetinë që numri i diagonaleve të tyre është katror i plotë i një numri të thjeshtë?

8. Është dhënë trapezi $ABCD$ me $AB \parallel CD$, $AB = x$, $CD = y$, pika O pikëprerja e diagonaleve të trapezit dhe M, N meset e diagonaleve të trapezit. Gjeni raportin e syprinës së trekëndëshit OMN me syprinën e trapezit $ABCD$.

Klasat VII-VIII - Pjesa e dytë

1. Le të jenë a, b numra realë të tillë që

$$\frac{2-a}{a} + \frac{2-b}{b} = \frac{2}{ab}.$$

Vërtetoni se të paktën njëri nga numrat a, b është i barabartë me 1.

2. Le të jetë $ABCD$ katror dhe E një pikë e çfarëdoshme në segmentin DA. Le të jetë F një pikë në gjysmëdrejtëzën AB e tillë që $\angle CEF = 45°$. Gjeni masën e këndit $\angle CFE$.

3. Për një numër natyror $n > 1$, shënojmë me a_n pjesëtuesin më të madh të numrit n i tillë që $a_n \neq n$ dhe me b_n pjesëtuesin më të vogël të numrit n i tillë që $b_n \neq 1$. Gjeni të gjithë numrat natyrorë n për të cilët vlen

$$\frac{a_n}{b_n} = 17.$$

4. Është dhënë një grup me n qeliza. Them se një grup qelizash është i ndashëm nëse ai përmban të paktën 3 qeliza. Pas çdo sekondi, ndonjë grup i ndashëm ndan një qelizë dhe qelizat e tjera në grupin përkatës ndahen në dy grupe të reja (jo domosdoshmërisht të barabarta).

(a) Nëse $n = 2021$, a është e mundur që pas disa sekondave të gjitha grupet e mbetura të kenë saktësisht nga 2 qeliza?

(b) Po nëse $n = 1878$?

Klasa IX - Pjesa e parë

1. Le të jenë $q - 3$, q dhe $q + 6$ numra të thjeshtë pozitivë. Sa është vlera e q?

2. Në një tabelë 3×3 një nxënës vendosi numrat nga 1 deri në 9. Pastaj nxënësi fshiu njërën nga numrat në tabelë. Shuma e numrave të mbetur në tabelë plotëpjesëtohet me 21. Cilin numër e fshiu nxënësi?

3. Gjatësia e njërës katet në një trekëndësh kënddrejtë me gjatësitë e brinjëve numra natyrorë është 7. Sa është perimetri i tij?

4. Sa është vlera e shprehjes

$$\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\frac{1}{2+4+6+8}+\cdots+\frac{1}{2+4+6+\cdots+2018+2020}?$$

5. Cilat janë dy shifrat e fundit të numrit 7^{7^7}?

6. Nëse $a+b+c=20$ dhe $ab+bc+ca=21$, atëherë sa është vlera e shprehjes $a^2+b^2+c^2$?

7. Brinjet e një trekëndëshi janë të gjitha me gjatësi numra natyrorë dhe dy nga to kanë gjatësinë 1 dhe 21, përkatësisht. Sa e ka gjatësinë brinja e tretë?

8. Në një klasë baleti ndodhen disa nxënës. Në atë klasë numri i djemve dhe numri i vajzave janë numra të thjeshtë. Gjithashtu numri i nxënësve në klasë është numër i thjeshtë. Në një moment të gjithë djemtë zgjodhën nga një vajzë për të kërcyer në çift. Numri i vajzave që mbetën pa kërcyer në atë moment ishte numër i thjeshtë. Sa djem dhe sa vajza ka në klasë?

Klasa IX - Pjesa e dytë

1. Le të jenë a, b, c numra realë të tillë që

$$\frac{3-a}{a}+\frac{3-b}{b}+\frac{3-c}{c}=\frac{3(a+b+c-1)}{abc}.$$

Vërtetoni se të paktën njëri nga numrat a, b, c është i barabartë me 1.

2. A është e mundur që të vendosen numra natyrorë në një tabelë me dimensione 20×21 ashtu që shumat e numrave në çdo dy drejtkëndësha të ndryshëm brenda tabelës të jenë të ndryshme?

3. Në tabelë janë shkruar numrat $1, 4, 10, 13, 20, 25, 32, 40, 56, 64, 76, 100$. Ana dhe Beni luajnë një lojë. Ana zgjedh dy numra nga tabela dhe i fshin ata. Pastaj, Beni zgjedh një numër në tabelë dhe e fshin atë. Pas kësaj, secilit numër të mbetur Beni ia shoqëron saktësisht njërën prej $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ dhe pastaj në tabelë shkruan numrin $abcdefghi$ (p.sh. nëse Beni i ka zgjedhur $a=10$, $b=1$, $c=13$, $d=40$, $e=56$, $f=4$, $g=20$, $h=100$, $i=76$ atëherë $abcdefghi = 101134056420100 76$). Themi se Beni fiton në qofte se numri $abcdefghi$ është katror i një numri natyror. Në të kundërtën fiton Ana. A ekziston strategjia fituese për ndonjërin lojtar? Arsyetoni përgjigjen tuaj!

4. Le të jetë dhënë trekëndëshi ABC, me O qendër të rrethit të jashtëshkruar, H ortoqendër dhe G pikëprerja e mesoreve (centroid). Le të jenë E dhe F meset e brinjëve AB dhe AC respektivisht dhe le të jetë M mesi i EF. Vërtetoni se drejtëza normale (pingule) me EF që kalon nëpër G, AO, dhe HM priten në një pikë.