**MINISTRIA E ARSIMIT**
**QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE**

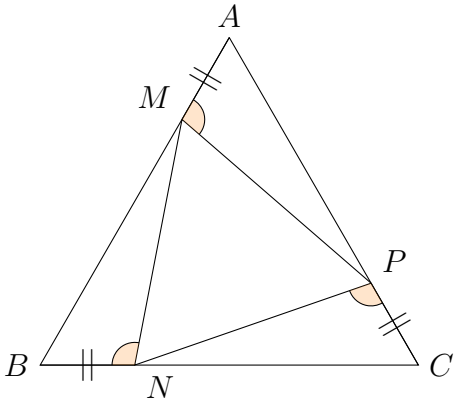
**OLIMPIADA E MATEMATIKËS PËR KLASËN E DYMBËDHJETË (12)**
*(Faza e dytë)*
**Viti shkollor 2024-2025**

1. Provoni se për çdo dy numra realë pozitivë $m$ dhe $n$ ka vend mosbarazimi

$$\left(2m+\frac{1}{2}\right)\left(2n+\frac{1}{2}\right) \leq \left(m^2+n+\frac{3}{4}\right)\left(n^2+m+\frac{3}{4}\right).$$

2. Një varg gjeometrik me herës $q$ dhe me shumën e $n$ kufizave të para të tij $S_n$ është i tillë që $S_{2n} = a^2 - b^2$ dhe $S_{3n} = a^2 - 3b^2$. Gjeni në varësi të parametrave $a$ dhe $b$ shumën $S_n$ të këtij vargu. Ç'kusht duhet të plotësojnë parametrat $a$ dhe $b$, që problema të ketë zgjidhje?

3. Jepet trekëndëshi $ABC$. Në brinjët $AB, BC$ dhe $AC$ merren përkatësisht pikat $M, N$ dhe $P$ të tilla që $BN = AM = CP$ dhe $\angle BNM = \angle AMP = \angle CPN$. Provoni se $ABC$ është barabrinjës.




4. Gjeni gjithë çiftet e renditur $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ për të cilët ka vend barazimi $x^2 + y^2 = 2010\sqrt{x-y} - 33^2$.

5. Dy polinomet $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ dhe $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ i kanë koeficientët numra të plotë, të tillë që $a_n - b_n$ është numër i thjeshtë, $a_{n-1} = b_{n-1}$ dhe $a_n b_0 - a_0 b_n \neq 0$. Duke supozuar se ekziston numri racional $r$ për të cilin $P(r) = Q(r) = 0$, tregoni se $r \in \mathbb{Z}$.