REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT DHE SPORTIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE
DREJTORIA E VLERËSIMIT

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e dytë
Viti shkollor 2023-2024 Klasa 10

1. Dihet se $y^x = 3$, $y^z = 27$ dhe $z^x = 4$. Gjeni z^z.

2. Provoni se ka vend mosbarazimi:
$$\frac{x}{2x+3y+3z} + \frac{y}{2y+3x+3z} + \frac{z}{2z+3y+3x} \geq \frac{3}{8}$$
ku x, y, z janë numra realë, pozitivë.

3. Në rrjetin koordinativ jepen pikat $A(0; \frac{4}{3})$, $B(-1; 0)$ dhe $C(1; 0)$. Një pikë e katërt $D(x; y)$, është e tillë që largesa e saj nga drejtëza BC është sa mesatarja gjeometrike e largesave të pikës D nga dy drejtëzat e tjera AB dhe AC.
Provoni se pika $D(x; y)$ ndodhet në dy vija të gradës së dytë, ku njëra prej tyre është rreth. Gjeni qendrën dhe rrezen e këtij rrethi.

4. Tri numra realë të ndryshëm nga zero, m, n, p, thuhet se janë në progresion harmonik, nëse ka vend barazimi $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} = \frac{2}{n}$.
Gjeni të gjitha treshet e numrave harmonikë $(m; n; p)$, të cilat plotësojnë kushtet: $m < n < p$, $m = 20$ dhe n është pjesëtues i p.

5. Në brinjën AC të një trekëndëshi $\triangle ABC$, pikat D dhe E janë të tilla që $AB = AE$ dhe $AE^2 = AD \times AC$. Provoni se segmenti BE është përgjysmore e këndit $\angle DBC$.