REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT DHE SPORTIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE
DREJTORIA E VLERËSIMIT

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e tretë
Viti shkollor 2023-2024

1. Zgjidhni ekuacionin:

$$4 + 5\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^2}\right) = 0$$

2. Një numër natyror n quhet numër "besnik", nëse ekzistojnë numrat natyrorë a, b, c, të tillë që: $a < b < c$; $n = a + b + c$ dhe a është pjesëtues i b; b është pjesëtues i c. Tregoni se përveç disave, të gjithë numrat natyrorë janë numra "besnikë". Gjeni shumën e gjithë numrave natyrorë "jo besnikë".

3. Provoni se mosbarazimi:

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2$$

   është i vërtetë për çdo $x, y, z > -1$.

4. Jepet funksioni:

$$f : y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36}, \quad a \in \mathbb{Z}$$

   Për ç'vlera të parametrit a, maksimumi dhe minimumi i funksionit $y = f(x)$ janë numra të plotë.

5. Një rreth me diametër AC pritet nga një drejtëz (l) në pikat B dhe D. Kjo drejtëz dhe diametri AC priten në pikën T jashtë rrethit. Nga skajet e diametrit ndërtohen pingulet AE dhe CF me drejtëzën (l).
   Nëse $EB = 2$ cm dhe $BD = 6$ cm, gjeni gjatësinë e segmentit DF.