REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT DHE SPORTIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE
DREJTORIA E VLERËSIMIT

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e dytë

Viti shkollor 2023-2024 Klasa 12

1. Jepet polinomi $P(x) = x^{10} + 2x^9 - 2x^8 - 2x^7 + x^6 + 3x^2 + 6x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Tregoni se mbetja e pjesëtimit të polinomit $P(x)$ me $(x + 1 - \sqrt{2})$ është 4.

2. Jepet trekëndëshi $\triangle ABC$ dhe një pikë O në pjesën e brendshme të planit të tij. Pika O është e tillë që $m(\angle BOC) = 90^\circ$ dhe $m(\angle BAO) = m(\angle BCO)$. Le të jenë M dhe N përkatësisht meset e brinjëve AC dhe BC. Duke supozuar se $OB = 2OM$, provoni se pikat A, O, N janë kolineare (ndodhen në një drejtëz).

3. Duke nisur me numrin 49 si kufizë e parë, ndërtohet vargu si vijon: Vendoset mes shifrës 4 dhe 9 numri 48, fitohet kufiza e dytë $a_2 = 4489$. Duke vazhduar më tej në këtë mënyrë, pra duke vendosur numrin 48 në qendër të kufizës paraardhëse, fitohet vargu i numrave: $49; 4489; 444889; 44448889 \ldots$ Provoni se çdo kufizë e një vargu të tillë është katror i plotë.

4. Jepet funksioni zbritës $y = f(x)$, $x \in]0; +\infty[$. Gjeni bashkësinë e vlerave të a-së, për të cilat ka vend $f(3a^2 + a + 8) < f(4a^2 - 5a + 1)$.

5. Një nxënës do të luajë lojën "Kapërce pengesën" e cila realizohet sipas këtij rregulli: Në pengesën e n-të, nxënësi duhet të hedhë n-herë një zar të rregullt kubik. Nëse shuma e pikëve të rëna në këtë n-hedhje është më e madhe se 2^n, konsiderohet se ky nxënës e ka kaluar këtë pengesë.
   (a) Maksimumi sa pengesa mund të kalojë ky nxënës gjatë një loje?
   (b) Sa është probabiliteti që ky nxënës të kalojë tri pengesat e para?